

Estrategias de resolución de problemas I



Taller de Talento Matemático de Navarra
Nafarroako Matematika-Talentu Tailerra

Pamplona, 26 de septiembre de 2025

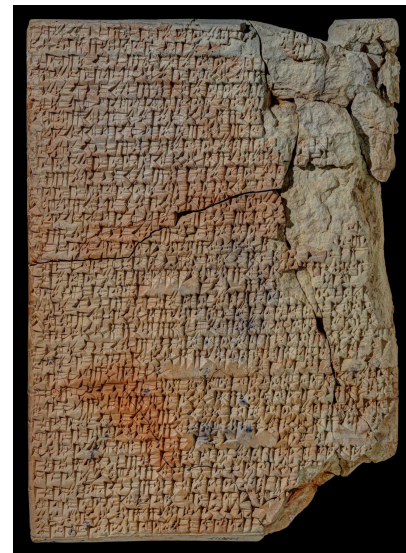
Introducción

Un problema matemático antiguo (Babilonia, ~ 1850 a. C.)

***«Encontré una piedra, pero no la pesé.
Después de añadirle un séptimo de su peso, y un
onceavo del nuevo peso, el total fue un ma-na.
¿Cuánto pesaba la piedra inicialmente?»***

Nota. $1 \text{ ma-na} = 500 \text{ g.}$

- ¿Nos recuerda este problema a «lo de clase»?
- ¿Sabríamos resolverlo?



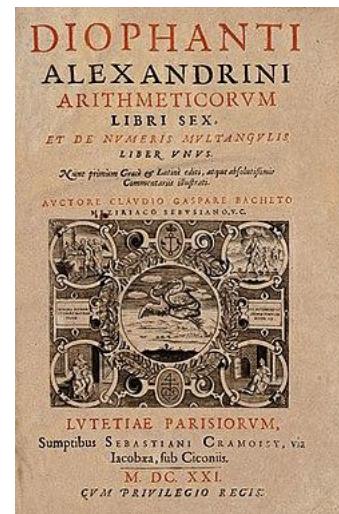
Yale Babylonian Collection 4644, anverso.

Introducción

Otro problema antiguo: El epitafio de Diofanto (siglo VI d. C.)

*Esta tumba guarda a Diofanto. ¡Ah, qué gran maravilla!
Fue un niño durante la sexta parte de su vida,
Añadiendo una duodécima parte a ésta, cubrió sus mejillas de vello;
Contrajo matrimonio después de una séptima parte,
y cinco años después de su boda le concedió un hijo.
¡Ay! Pobre hijo tardío; tras alcanzar la medida
de la mitad de la vida de su padre, el frío Destino se lo llevó.
Después de consolar su dolor durante cuatro años, terminó su vida.*

¿Cuántos años vivió Diofanto?



Portada de «Arithmetica» (1621).

¿Qué es un problema?

Algunas características para identificarlo...

- Representa un **desafío** para quien lo intenta resolver.
- **No nos deja bloqueados** de entrada, aunque no se nos ocurra.
- Nos **interesa**, queremos resolverlo, hablar sobre ello con otras personas.

«It's hard to do a really good job on anything you don't think about in the shower».

(Paul Graham)

Pero... ¿Cómo se resuelve un problema?

¿Cómo se resuelve un problema?

No hay una respuesta única, pero sí algunos **principios generales** que son útiles para empezar:

- Para resolver un problema... **¡Hay que practicar resolviendo otros muchos!**
- Proverbio del Go: «pierde tus primeras 50 partidas lo más rápido posible».
- ¡Intenta enganchar a tus **amigos**! Es más divertido y aprendéis unos de otros.

Los problemas más interesantes **no** se parecen a los que vemos en el instituto:

- A veces necesitarás conocer algo que **no has visto en clase**. Eso es bueno, ¡aprenderás más!
- No se trata de «memorizar fórmulas» o «aplicar recetas». Se trata de **comprender**.
- Habrá muchos problemas que, simplemente, no sabemos resolver. **¡Nos pasa a todos/as!**
- «¿Cómo se me va a ocurrir eso?» Si no se te ha ocurrido, **no te preocupes**. Estás aprendiendo.

Pasos para resolver un problema

De manera general, podemos señalar los siguientes pasos:

1. **Familiarizarse con el problema.** Analizamos el enunciado del problema tranquilamente para identificar cuál es la situación de partida, cuál es la de llegada y qué hay que lograr.
2. **Buscar estrategias.** Tras reflexionar, diseñamos ideas para «atacar» el problema. Es bueno tratar de abrirse y probar, aunque no estemos seguros de que nuestra idea dé resultado.
3. **Llevar adelante la estrategia.** Desarrollamos nuestra estrategia paso a paso y con cuidado, verificando si nos estamos acercando o no al objetivo.
4. **Revisar el proceso y sacar conclusiones.** ¿Qué hemos aprendido del problema? ¿Podemos generalizar el resultado? ¿Podríamos aplicarlo a otros problemas conocidos?

¡Es muy provechoso reflexionar siempre sobre el problema!

Además... Siempre recordaremos mejor los problemas que nos han costado más.

Estrategias de resolución de problemas

1. **Analogía o semejanza.** «¿He visto esto antes?»
2. **Simplificar, casos particulares.** «¿Puedo resolver un problema similar, pero más sencillo?»
3. **Organización, codificación.** «¿Puedo organizar la información o expresarla mejor?»
4. **Ensayo y error.** «Pruebo opciones y veo si me aproximo a lo que busco...»
5. **Trabajar marcha atrás o considerar el problema resuelto.**
6. **Experimentación.** «¿Puedo detectar algún patrón? ¿Alguna pauta? ¿Alguna ley o regla?»
7. **Modificar el problema.** «Descomponer el problema, proponer subproblemas...»
8. **Conjeturas.** «Basándome en la exploración que he hecho... ¿Qué podría ser cierto? »
9. **Hacer recuentos.** «Cuento opciones, primero parcialmente, luego exhaustivamente»
10. **Exploración.** «Analizo casos extremos, observo simetrías...»
11. **Técnicas generales.** Reducción al absurdo, inducción, principio del palomar...

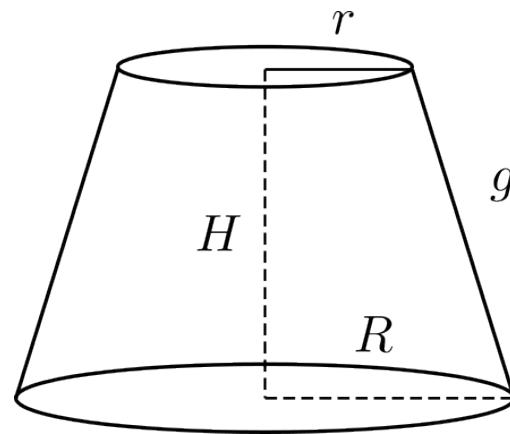
1.- Analogía o semejanza

Consiste en buscar semejanzas con otros problemas que ya sabemos resolver.

Pregunta clave: *¿A qué nos recuerda? ¿Se parece a aquel otro problema que...?*

Ejemplo. Calcular el área lateral del tronco de cono de la figura.

- R es el radio de la circunferencia de la base mayor.
- r es el radio de la circunferencia de la base menor.
- H es la altura del tronco de cono.
- g es la generatriz del tronco de cono.



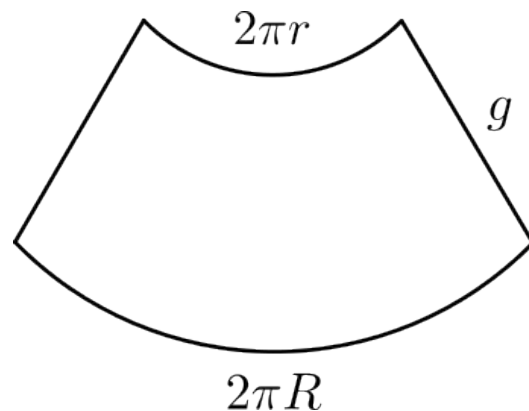
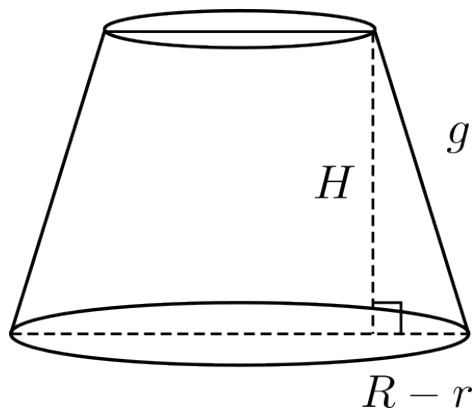
1.- Analogía o semejanza

Idea clave. El área lateral se corresponde al siguiente desarrollo:

¿A qué se parece?

Respuesta: ¡A un **trapecio**, claro! (Estamos usando la analogía).

El área del trapecio es:
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$



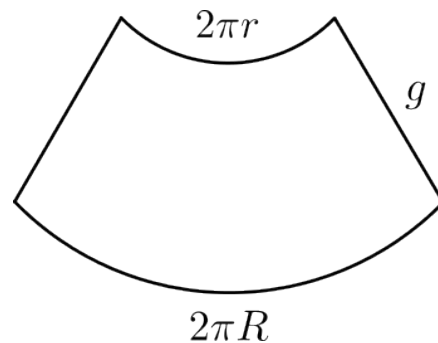
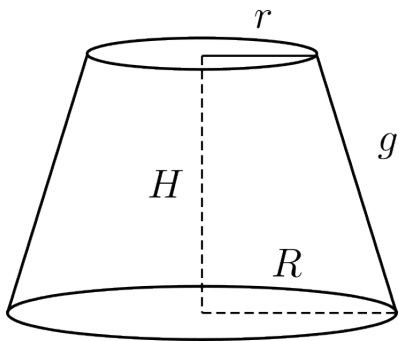
La relación entre g y H resulta (teorema de Pitágoras):

$$g = \sqrt{H^2 + (R - r)^2}$$

1.- Analogía o semejanza

Por tanto, el área pedida resulta:

$$A = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot \sqrt{H^2 + (R - r)^2}$$



¡Qué curioso! ¿Será cierto?

Problemas para trabajar

Problema 1 (Muchos ceros). ¿En cuántos ceros termina el número

$$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1?$$

***Nota.** Como $100!$ es un número muy grande, intenta resolver primero el problema análogo con*

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Problemas para trabajar

Problema 2 (Cuadrados mágicos).

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Este cuadrado está relleno con los números del 1 al 9. Se llama **cuadrado mágico** y su disposición es muy peculiar. La suma de los números en una misma fila, columna o diagonal siempre es la misma:

- $2 + 7 + 6 = 15$ (suma de los números de la 1.ª fila),
- $9 + 5 + 1 = 15$ (suma de los números de la 2.ª fila),
- $2 + 5 + 8 = 15$ (suma de los números de la diagonal principal),
- $6 + 1 + 8 = 15$ (suma de los números de la 3.ª columna).

Al número 15 se le llama **característica del cuadrado mágico**.

Se pide: construir cuadrados mágicos 3 x 3 de características 24, 375 y -120.

Problemas para trabajar

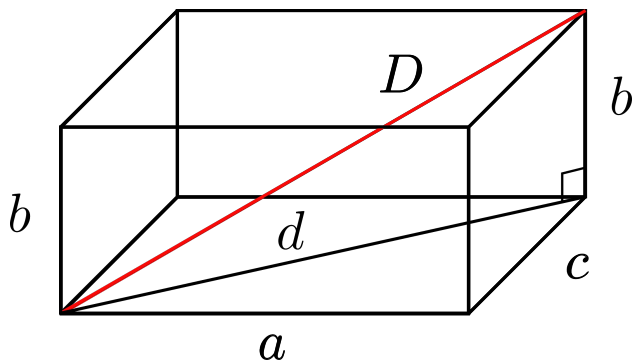
Problema 3 (Sumar quince). Nueve fichas, numeradas del 1 al 9, se ponen sobre la mesa. Juegan dos jugadores. Cada uno coge una ficha por turno. Gana el primero que sume 15 con 3 de sus fichas, en el orden que quiera.

- ¿Puedes garantizar que el primer jugador siempre puede ganar?
- ¿Puedes garantizar que el segundo jugador siempre puede ganar?

***Nota.** Busca una analogía con el cuadrado mágico 3×3 . ¿A qué te recuerda?*

Problemas para trabajar

Problema 4 (Caja de zapatos). Para una caja de zapatos (**paralelepípedo**) de medidas a , b y c , encuentra la expresión de su diagonal D en función de las medidas anteriores.



Nota. Busca una analogía con un resultado similar en el plano.

Problemas para trabajar

Problema 5 (Uno de cartas). Con todos los ases, sotas, caballos y reyes de una baraja (16 cartas) construye un cuadrado 4 x 4 de forma que se cumpla, simultáneamente:

- En cada fila, columna y diagonal sólo hay una carta de cada figura.
- En cada fila, columna y diagonal sólo hay una carta de cada palo.

***Nota.** Con una idea similar a la del cuadrado mágico 3 x 3... ¡Explora opciones! Hay 71 soluciones.*

Soluciones:

1. 24.

3. No hay estrategia ganadora. Si se juega bien, no hay vencedor.

4. $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

5.

Ao	Rb	Sc	Ce
Se	Cc	Ab	Ro
Cb	So	Re	Ac
Rc	Ae	Co	Sb

2.- Simplificar, casos particulares

Consiste en considerar un problema **más sencillo** que esté «contenido» en el problema que queremos resolver. De este modo hacemos el problema más concreto y específico, esperando hacer algún progreso.

- ¿El problema resulta difícil por su tamaño? ¿Por tener demasiados elementos?

Idea. Intenta pensar en un problema semejante más sencillo, o céntrate en una parte del problema.

- ¿El problema tiene números muy grandes?

Idea. Intenta resolver el mismo problema pero para números más sencillos.

- ¿Has encontrado un ejemplo concreto que refuta lo que pretende ser una ley?

Idea. ¡Felicidades! Has encontrado un **contraejemplo**.

2.- Simplificar, casos particulares

Esta estrategia es muy interesante para los principiantes, ya que nos sirve para ir ganando confianza. Además, nos ayuda mucho para evitar atascos o bloqueos, ya que permite ir obteniendo algo más de información.

Ejemplo. 16 jugadores de tenis participan en un sorteo para emparejarse entre sí en la primera ronda. ¿De cuántas maneras se pueden hacer los emparejamientos?

Solución. Como el número de jugadores es elevado, comenzamos con 2 jugadores. Claramente, hay 1 sola forma. Si el número de jugadores es 3, tenemos 3 emparejamientos. Si los jugadores son 4, tenemos los siguientes 6 grupos: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) y (3,4). Si los jugadores son 6, aparecen 15 grupos (¡compruébalo!).

¿Serías capaz de encontrar una fórmula para contar cuántos emparejamientos hay con 16 jugadores?

2.- Simplificar, casos particulares

Otra forma de intentar resolver el problema es **visualizar** las distintas situaciones usando diagramas para sacar alguna conclusión:

	1	2
1	No	Sí
2	No	No

2 jugadores, 1 emparejamiento.

	1	2	3	4
1	No	Sí	Sí	Sí
2	No	No	Sí	Sí
3	No	No	No	Sí
4	No	No	No	No

4 jugadores, 6 emparejamientos.

Problemas para trabajar

Problema 1 (Cuadrados). Alguien dijo una vez que el tablero de ajedrez contiene 204 cuadrados. ¿Estará en lo cierto?

Nota. Comienza resolviendo el problema para tableros 1×1 , 2×2 , 3×3 , 4×4 , ...

Problema 2 (Uno de números). ¿Puede terminar el cuadrado de un número entero por tres cifras idénticas distintas de cero?

Nota. Prueba opciones, quizá encuentres un ejemplo concreto.

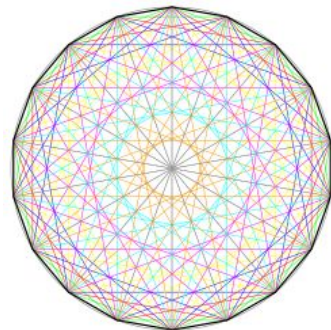
Problema 3 (Castillo de cartas). Este es un castillo de cartas de tres pisos. Se necesitan 15 cartas para hacerlo. ¿Cuántas cartas se necesitarán para un castillo similar de 10 pisos de altura? El récord mundial está en 61 pisos. ¿Cuántas cartas necesitarías para batir ese récord y hacer un castillo de 62 pisos de altura?



Problemas para trabajar

Problema 4 (La rosa mística). Este bonito diagrama se ha realizado uniendo entre sí con líneas rectas los 18 puntos del círculo. Cada punto está unido a todos los demás. ¿Cuántas líneas rectas hay en total?

Nota. Además de ver casos sencillos, puedes pensar en analogías con otro problema anterior.



Problema 5 (Capicúas). A los números como 12321, que se leen lo mismo de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, se les llama **capicúas**. Tengo un amigo que asegura que todos los números capicúas de 4 cifras son divisibles por 11. ¿Es cierto?

Problema 6 (Rectángulos). ¿Cuántos rectángulos de lados paralelos a los lados del tablero hay en un tablero de ajedrez?

Problemas para trabajar

Problema 7 (Soluciones). ¿Qué relación hay entre las soluciones de las ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{y} \quad cx^2 + bx + a = 0 \quad ?$$

Soluciones:

1. Sí.
2. Sí, por ejemplo el 1444.
3. 155; 5797.
4. 153.
5. Sí.
6. N.º de rectángulos no cuadrados: 1092; N.º total de rectángulos: 1296.
7. Son inversas.

Organización, codificación

La organización consiste en ser sistemático a la hora de resolver el problema. Muchas veces implica el uso de símbolos apropiados, diagramas, figuras o esquemas. El proceso de organizar la información nos permite relacionar ideas y hallar otras nuevas.

- Conviene que las figuras y diagramas incorporen los datos relevantes del problema.
- Una notación adecuada y precisa facilita el problema.

Ejemplo. Hay varias formas de sumar 10 usando cuatro sumandos impares. Se tiene $10 = 1 + 1 + 1 + 7$; $10 = 1 + 1 + 3 + 5$; $10 = 1 + 3 + 3 + 3$. Tenemos 3 formas distintas. Ahora, para obtener 20 con 8 sumandos impares, ¿cuántas formas hay?

Aquí hay que organizarse un poco y ser sistemático: $20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 13$; $20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 7$; $20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 11$... Así llegamos hasta 11 combinaciones posibles. ¿Te atreves a contarlas todas?

Organización, codificación

Ejemplo. Tenemos 3 cajas iguales y 5 guantes de la mano izquierda, todos ellos iguales. ¿De cuántas formas se pueden distribuir en las tres cajas?

Después de jugar un poco con el problema, podemos definir un código que organice nuestra búsqueda. Si los guantes los representamos por A y las cajas por |, la palabra AA | A | AA nos indica que en la 1.^a caja hay 2 guantes, en la 2.^a 1 guante y en la 3.^a 2 guantes. ¡Quizá este código nos resulte más fácil de manejar y así resolver el problema!

Ejemplo. En tu bolsillo tienes 2 monedas (1€ y 2€) y 3 billetes (5€, 10€, 20€). ¿Cuántas cantidades distintas puedes formar?

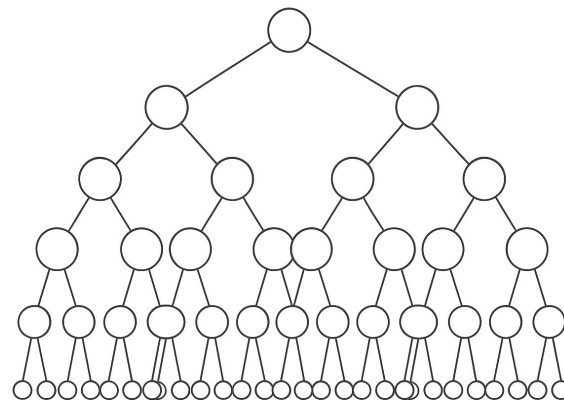
Solución. Si empezamos una búsqueda poco organizada, nos liaremos. Observar que cada moneda o billete puede figurar o no en nuestra elección. Eso nos conduce al siguiente diagrama de árbol:

Organización, codificación

Las decisiones que se reflejan en el **diagrama** serían:

- ¿Usamos la moneda de 1€? (S/N)
- ¿Usamos la moneda de 2€? (S/N)
- etcétera.

Otra manera de verlo podría ser usando la notación de **listas**. Así, (S, N, N, S, S) indicaría que uso la moneda de 1€, el billete de 10€ y el billete de 20€.



Problemas para trabajar

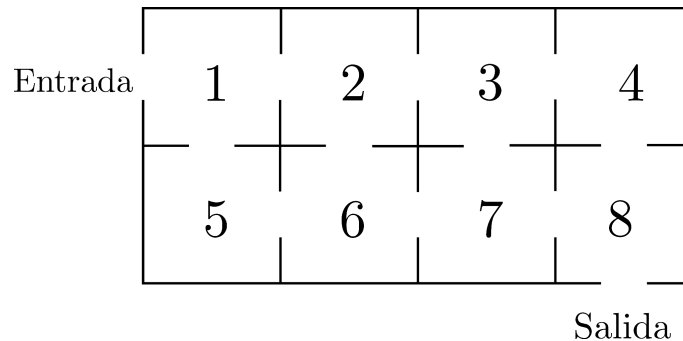
Problema 1 (El artel de segadores). Una cuadrilla de segadores debía segar dos prados, uno de doble superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal en el prado grande; después de la comida, la mitad de la gente se quedó en el prado grande y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde se terminaron los dos campos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Cuántos segadores componían la cuadrilla?

Problema 2 (Haciendo footing). Pepe y Pablo hacen footing de A a B. Pepe corre la mitad de la distancia y anda la otra mitad. Pablo corre la mitad del tiempo y anda la otra mitad. Los dos corren a la misma velocidad y los dos andan a la misma velocidad. ¿Quién llega antes?

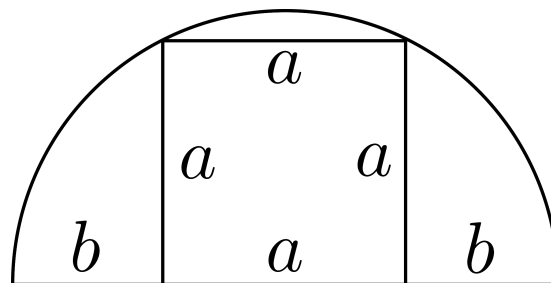
Problema 3 (El monje en la montaña). Un monje decide subir desde su ermita a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale de su ermita a las 9 de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y, a la mañana siguiente, a las 9 de la mañana, emprende el camino a su ermita por el mismo sendero. Al ir bajando, se pregunta: ¿habrá algún punto del camino en el que hoy esté a la misma hora que estuve ayer?

Problemas para trabajar

Problema 4 (Contando caminos). Aquí aparece el plano de un solar. Un gato quiere llegar a la posición de salida. ¿Cuántos caminos diferentes tiene? Se supone que no puede pasar dos veces por el mismo sitio.



Problema 5 (Uno de geometría). Se inscribe un cuadrado en un semicírculo. Calcula la razón a/b .



Problemas para trabajar

Soluciones.

1. 8.

2. Pablo.

3. Sí.

4. 8.

5. $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$

4.- Ensayo y error

La técnica de **ensayo y error** consiste en realizar los siguientes pasos:

1. Elegir un valor (resultado, propiedad u operación) posible.
2. Probar con ese valor las condiciones indicadas por el problema.
3. Verificar si hemos alcanzado el objetivo buscado.

Ejemplo. Calcular un número entero que, al elevarlo al cuadrado y sumarle el número buscado, nos dé 132 como resultado.

Solución.

1. Elegimos un valor: por ejemplo, el 10.
2. Probamos con este valor las condiciones del problema: $10^2 + 10 = 110$.
3. Verificamos si hemos logrado el objetivo: 110 es menor que 132.

Volvemos a probar con otro número, 14; $14^2 + 14 = 210$. Como 210 es mayor que 132, el resultado puede ser 11, 12 o 13. Basta probar estos casos para llegar a una conclusión.

4.- Ensayo y error

Esta estrategia puede ser puesta en práctica de formas diferentes:

1. **Ensayo y error fortuito:** se lleva a cabo sin pautas, al azar.
2. **Ensayo y error sistemático:** los valores no se eligen al azar, sino ordenadamente, de forma que eliminemos las posibles repeticiones de ensayo y agotemos las posibilidades.
3. **Ensayo y error dirigido:** además de probar ordenadamente, contrastamos cada respuesta para analizar si estamos más cerca o más lejos del objetivo buscado.

Ejemplo. Ane y Carlos fueron de visita a la granja de su abuelo. Durante su estancia, vieron un corral con cerdos y gallinas. Carlos dijo haber contado 18 animales en total. Ane afirma haber contado un total de 50 patas. ¿Cuántos cerdos había?

4.- Ensayo y error

Solución.

1. Ensayo y error fortuito: damos valores al azar.

Cerdos	Gallinas	Patas
14	4	64
12	6	60
10	8	...

2. Ensayo y error sistemático: se van dando valores 1, 2, 3, etc.

Cerdos	Gallinas	Patas
1	17	38
2	16	40
3	15	...

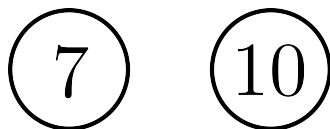
4.- Ensayo y error

3. Ensayo y error dirigido:

Cerdos	Gallinas	Patas
10	8	56 (nos hemos pasado) sobran cerdos.
9	9	54 (nos hemos pasado) sobran cerdos.
8	10	52 (nos hemos pasado) sobran cerdos.
7	11	50 es la solución.

Problemas para trabajar

Problema 1 (Discos). Aquí tienes dos discos circulares. En la cara superior de cada uno de ellos hay escrito un número. En la otra cara tiene escrito otro número. Si lanzamos los dos discos al aire y sumamos los dos números, podemos obtener estos resultados: 11, 12, 16 y 17. Investiga qué números están escritos en la cara oculta de cada disco.



Prueba ahora con estos tres discos sabiendo que los resultados que se obtienen son: 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23.



¿Y si los resultados fuesen 12, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21? ¿Qué números habría escritos en la cara oculta de cada disco?

Problemas para trabajar

Problema 2 (Huevos de gallina y pata). El huevero tiene ante sí seis cestas de huevos. Cada una tiene huevos de una clase, de gallina o de pata. Cada cesta tiene el número de huevos que se indica.

6 15 29
12 14 23

El huevero dice señalando una cesta que no acierto a ver cuál es exactamente: «si vendo esta cesta, me quedará el doble de huevos de gallina que de pata». ¿Cuál es esa cesta?

Problema 3 (Números). Obtener todos los números del 1 al 10 utilizando solamente 4 cuatros y los signos de las operaciones.

Problemas para trabajar

Problema 4 (Juega con tu calculadora).

1. 357.627 es el producto de tres números impares consecutivos. Hállalos;
2. 15.252 es el producto de dos números consecutivos. ¿Cuáles son?
3. 206.725 es la suma de dos cuadrados perfectos consecutivos. ¿Cuáles son?

Problema 5 (Dos números). Las primeras cifras que resultan de dividir dos números de dos cifras en una calculadora han sido 0,9310344... ¿Cuáles eran esos números?

Problemas para trabajar

Soluciones.

1. Con dos discos, 2 y 9 o 6 y 5.
Con tres discos y los primeros resultados, no hay solución entera.
Con tres discos y los segundos resultados: 3, 2, 7 o 3, 6, 3 o 5, 2, 5 o 5, 4, 3 o 1, 4, 7.
2. Vende la cesta que contiene 12 huevos.
3. Si queréis soluciones de éste, ¡mandadme un correo!
4. 69, 71 y 73; 123 y 124; 321 y 322.
5. Hay varias respuestas: $27/29$, $54/58$ u $81/87$.



¡MUCHAS GRACIAS!

¿Cuestiones, dudas, sugerencias...?

`jserrander@educacion.navarra.es`